Методическая разработка

урока по теме

«Отбор корней при решении тригонометрических уравнений»

в 11 классе

разработал: Детинич С.Е.

2012-2013 УЧ.ГОД

Тема. *Отбор корней при решении тригонометрических уравнений*

Тип урока: систематизация умений и навыков.

Цели урока:

- **дидактические:** обобщение и систематизация знаний учащихся по теме « Решение тригонометрических уравнений»; закрепление основных понятий базового уровня; систематизация умений и навыков по применению трех способов отбора корней в тригонометрических уравнениях.
- **развивающие:** развитие познавательного интереса, логического мышления, интеллектуальных способностей; формирование математической речи;

Ход урока.

I **Организационный этап.**

II **Постановка целей.**

Сегодня на уроке мы повторим с вами решение тригонометрических уравнений и приемы отбора корней при решении тригонометрических уравнений.

III **Домашнее задание**

IV **Актуализация опорных знаний (устная работа).**

В результате выполнения задания мы повторим определения арккосинуса, арксинуса, арктангенса и арккотангенса; формулы для решения простейших тригонометрических уравнений.

1. Вычислите:

а) $\arcsin(-1) \quad = -\frac{\pi}{2}$;

б) $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) \quad = \frac{\pi}{6}$;

в) arcsin 2 (не существует);

г) arctg $\sqrt{3} \quad = \frac{\pi}{3}$;

д) arccos$(\frac{\pi}{2})$ (не существует);

е) arcctg$(-\sqrt{3})$ = π - arcctg$\sqrt{3} = -\frac{5\pi}{6}$.

2. Решить уравнения:

а) cos x = - 1; $x = \pi + 2\pi\kappa, \kappa \in Z$;

б) $\sin x = -\frac{1}{2}$;

$x = (-1)^k \arcsin(-\frac{1}{2}) + \pi\kappa, \kappa \in Z$

$x = (-1)^{k+1} \arcsin\frac{1}{2} + \pi\kappa, \kappa \in Z$

$x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + 2\pi\kappa, \kappa \in Z$;

в) cosx = 0; $x = \frac{\pi}{2} + \pi\kappa, \kappa \in Z$;

г) tg x = $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x = \frac{\pi}{6} + \pi\kappa, \kappa \in Z$.

V **Обобщение знаний.**

Выполнение упражнений.

Проблема отбора корней, отсеивания лишних корней при решении тригонометрических уравнений специфична. Лишние корни могут появиться вследствие того, что в процессе решения произошло расширение области определения уравнения. Запись ответа тригонометрического уравнения часто связана с понятиями объединения и пересечения множеств. Обычно при решении таких уравнений получают серии корней, и в окончательном варианте ответ записывают в виде объединения этих серий. Но как быть, если эти серии пересекаются? Сегодня мы на конкретных примерах рассмотрим различные способы и приемы при выборе ответа.

Перед вами раздаточный материал.

1. Отбор корней в тригонометрическом уравнении с помощью числовой окружности.

Проблему отбора корней, отсеивания лишних корней при решении тригонометрических уравнений часто можно решить с помощью изображения чисел на тригонометрическом круге. В ряде случаев этот прием более наглядный и убедительный.

Пример 1. $\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$.

Решение.

$\cos x - \cos 3x - (1 - \cos 2x) = 0$,

$2\sin x \sin 2x - 2\sin^2 x = 0$,

$2\sin x (\sin 2x - \sin x) = 0$,

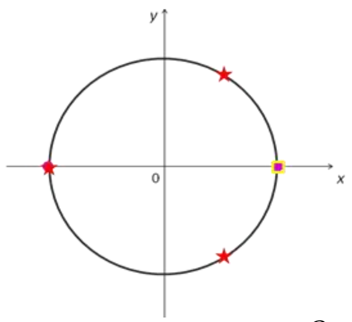
$$4\sin x \sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x\pi}{2} = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin\dfrac{x}{2} = 0, \\ \cos\dfrac{3x}{2} = 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in Z \\ \dfrac{x}{2} = \pi n, n \in Z \\ \dfrac{3x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi m, m \in Z; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in Z \\ x = 2\pi n, n \in Z \\ x = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{2\pi m}{3}, m \in Z; \end{array}\right.$$

Изобразим серии корней на числовой окружности. Видим, что первая серия включает в себя корни второй серии, а третья серия включает в себя числа вида $x = \pi + 2\pi k$ из корней первой серии.



$$Ответ: \{2\pi n; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi m}{3} / n, m \in Z\}.$$

Пример 2. tg x + tg $2x$ – tg $3x$ = 0.

Решение.

$$ОДЗ: \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \\ x \neq \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi n}{2}, \\ x \neq \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi n}{3}, n \in Z. \end{cases}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x}{\cos x \cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin 3x}{\cos x \cos 2x} - \frac{\sin 3x}{\cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin 3x(\cos 3x - \cos x \cos 2x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin 3x(\cos 3x - \frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\sin 3x(\frac{1}{2}\cos 3x - \frac{1}{2}\cos x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0;$$

$$\frac{\frac{1}{2}\sin 3x(\cos 3x - \cos x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0;$$

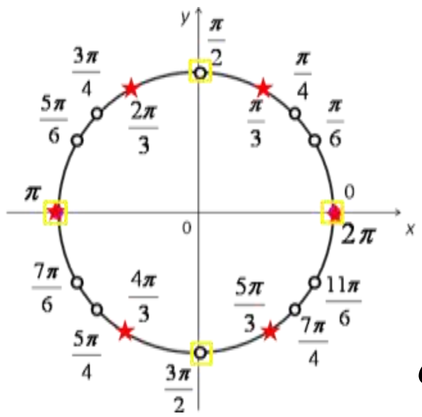
$$\frac{\frac{1}{2}\sin 3x(-2\sin 2x \sin x)}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0;$$

$$\frac{-\sin 3x \sin 2x \sin x}{\cos x \cos 2x \cos 3x} = 0;$$

tg x · tg $2x$ · tg $3x$ = 0;

$$\left[\begin{array}{l} x = \pi n, n \in Z, \\ x = \frac{\pi k}{2}, k \in Z, \\ x = \frac{\pi m}{3}, m \in Z. \end{array}\right.$$

Из второй серии корней числа вида $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ не удовлетворяют ОДЗ, а числа вида $x = \pi k$ входят в третью серию. Первая серия так же входит в третью серию корней, поэтому ответ можно записать одной формулой.



$$Ответ:\{\frac{\pi m}{3}/m\in Z\}.$$

Пример 3. $\frac{\cos 3x}{\sin 2x}=0.$

Решение.

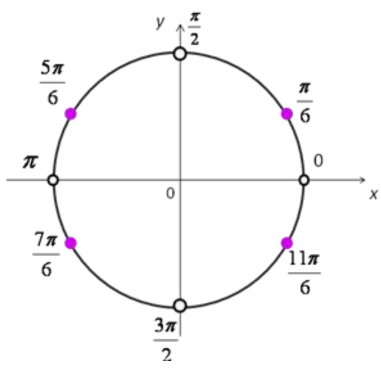
$$\begin{cases}\cos 3x=0,\\ \sin 2x\neq 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}, k\in Z,\\ x\neq\frac{\pi n}{2}, n\in Z;\end{cases}$$

Иногда случается, что часть серии входит в ответ, а часть нет. Нанесем на числовую окружность все числа

серии $x=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}, k\in Z$ и исключим корни,

удовлетворяющие условию $x\neq\frac{\pi n}{2}, n\in Z$



Оставшиеся решения из серии корней можно объединить в формулу $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$

$$Ответ: \{\pm\frac{\pi}{6} + \pi n / n \in Z\}.$$

2. Отбор корней в тригонометрическом уравнении алгебраическим способом .

Изображение корней на тригонометрическом круге не всегда удобно, когда период меньше 2π.

Пример 1. $\cos 2x + \cos\frac{3x}{4} = 2$

Решение.

Поскольку наибольшее значение функции *y* = cos *t* равно 1, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos\frac{3x}{4} = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pi k, k \in Z, \\ x = \frac{8\pi n}{3}, n \in Z; \end{cases}$$

Решением уравнения является пересечение серий, то есть нам надо решить уравнение

$$\pi k = \frac{8\pi n}{3};$$

$$k = \frac{8n}{3};$$

Получаем

$$k = 8t, \quad n = 3t, t \in Z$$

Итак,

$$x = 8\pi t, t \in Z.$$

$Ответ:\{8\pi t \,/\, t\in Z\}.$

Пример 2.

$$\cos\frac{x}{4}\sin x-2\sin^2 x+\cos x+\sin\frac{x}{4}\cos x-2\cos^2=0.$$

Решение.

$$\sin(x+\frac{\pi}{4})+\cos x=2;$$

$$\begin{cases}\sin\frac{5x}{4}=1,\\ \cos x=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{5x}{4}=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z,\\ x=2\pi k, k\in Z;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\frac{2\pi}{5}+\frac{8\pi n}{5}, n\in Z,\\ x=2\pi k, k\in Z;\end{cases}$$

Решением уравнения является пересечение серий, то есть нам надо решить уравнение

$$2\pi k=\frac{2\pi}{5}+\frac{8\pi n}{5};$$

$$k=\frac{1+4n}{5};$$

$$5k=1+4n;$$

$$n=\frac{5k-1}{4};$$

$n=k+\frac{k-1}{4},$ где $\frac{k-1}{4}-$ целое число.

Пусть $\frac{k-1}{4}=m,$

тогда $k=4m+1, \quad n=5m+1.$

Итак,

$x = 2\pi + 8\pi m, m \in Z.$

$Ответ: \{2\pi + 8\pi m / m \in Z\}.$

3. Отбор корней в тригонометрическом уравнении с некоторыми условиями.

Изложенные выше способы отбора корней в тригонометрических уравнениях не всегда применяются в чистом виде: выбор способа зависит от конкретных условий, но иногда эти способы комбинируются.

Пример 1. Найти корни уравнения

sin 2*x* = cos *x* | cos *x* | , удовлетворяющие

условию $x \in [0; 2\pi]$.

Решение.

sin 2*x* = cos *x* | cos *x* |;

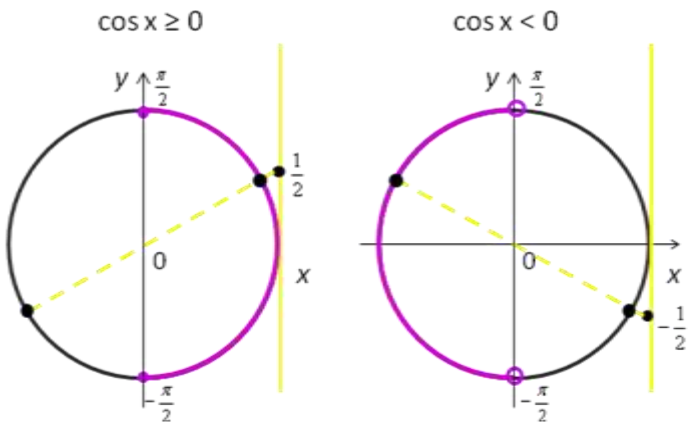
2sin *x*· cos *x* - cos *x* | cos *x* |=0;

cos *x* (2sin *x* - | cos *x* |)=0;

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x \ge 0, \\ \cos x(2\sin x - \cos x) = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0, \\ \cos x(2\sin x + \cos x) = 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos x \ge 0,\\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z,\\ x=arctg\dfrac{1}{2}+\pi k, k\in Z;\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}\cos x<0,\\ x=-arctg\dfrac{1}{2}+\pi m, m\in Z.\end{cases}\end{array}\right.$$

Определим решения систем с помощью числовой окружности.



$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z,\\ x=arctg\dfrac{1}{2}+2\pi k, k\in Z.\end{array}\right. \qquad x=\pi-arctg\dfrac{1}{2}+2\pi m, m\in Z.$$

Условию $x \in [0; 2\pi]$ удовлетворяют числа $x=\dfrac{\pi}{2}$, $x=\dfrac{3\pi}{2}$, $x=arctg\dfrac{1}{2}$ (для первой системы) и $x=\pi-arctg\dfrac{1}{2}$ (для второй системы).

$$Ответ: \{\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}; arctg\frac{1}{2}; \pi-arctg\frac{1}{2}\}.$$

Пример 2. Найти все решения уравнения

$\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{2}\cos 3x=0,$ принадлежащие отрезку $[\pi; \dfrac{3\pi}{2}].$

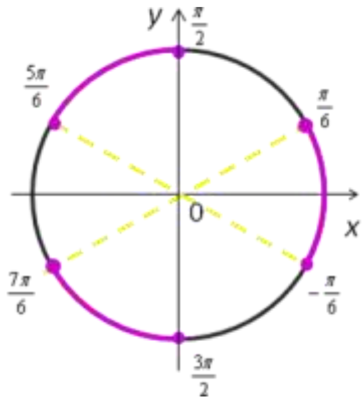
Решение.

ОДЗ: cos 3x ≥ 0;

$$-\frac{\pi}{2}+2\pi n\le 3x\le\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in Z;$$

$$-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\le x\le\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}, n\in Z;$$

Отметим ОДЗ на тригонометрическом круге:



Отрезку $[\pi;\frac{3\pi}{2}]$ принадлежит только один промежуток из ОДЗ, а именно $[\frac{7\pi}{6};\frac{3\pi}{2}]$. .

Решим уравнение и выберем корни, принадлежащие этому промежутку:

1 + sin 2*x* = 2cos^2 3*x* ;

sin 2*x* = cos 6*x*;

sin 2*x* - cos 6*x*=0;

$$\sin 2x-\sin(\frac{\pi}{2}-6x)=0;$$

$$2\cos(\frac{\pi}{4}-2x)\sin(4x-\frac{\pi}{4})=0;$$

$$2\cos(2x-\frac{\pi}{4})\sin(4x-\frac{\pi}{4})=0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos(2x-\frac{\pi}{4})=0,\\ \sin(4x-\frac{\pi}{4})=0.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z,\\ 4x-\frac{\pi}{4}=\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\\ x=\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}, k\in Z.\end{array}\right.$$

Выберем корни, удовлетворяющие условию задачи.

Из первой серии: $\frac{7\pi}{6}\le\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\le\frac{3\pi}{2}, n\in Z;$

$$28\pi\le 9\pi+12\pi n\le 36\pi, n\in Z;$$

$$19\le 12n\le 27, n\in Z.$$

Следовательно n=2, то есть $x=\frac{11\pi}{8}.$

Из второй серии: $\frac{7\pi}{6}\le\frac{\pi}{16}+\frac{\pi k}{4}\le\frac{3\pi}{2}, n\in Z;$

$$56\pi\le 3\pi+12\pi n\le 72\pi, n\in Z;$$

$$53\le 12n\le 69, n\in Z.$$

Следовательно n=5, то есть $x=\frac{21\pi}{16}.$

$$\textit{Ответ}:\{\frac{11\pi}{8};\frac{21\pi}{16}\}.$$

Пример 3. Найти все корни уравнения

$$10\cos^2(\frac{\pi}{2}+x)=\sin(\frac{7\pi}{2}+2x)+3,$$

которые удовлетворяют условию $x\in[-\frac{2\pi}{3};\frac{19\pi}{12}]$.

Решение.

$10\sin^2 x = -\cos 2x + 3;$

$10\sin^2 x = 2\sin^2 x - 1 + 3,$

$8\sin^2 x = 2;$

$$\sin^2 x=\frac{1}{4};$$

$$\sin x=\pm\frac{1}{2};$$

$$\left[\begin{array}{l} x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z, \\ x=(-1)^m\cdot(-\frac{\pi}{6})+\pi m, m\in Z; \end{array}\right.$$

С помощью числовой окружности получим:

$$x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z;$$

Выберем корни, удовлетворяющие условию задачи.

Из первой серии: $-\frac{2\pi}{3}\le\frac{\pi}{6}+\pi n\le\frac{19\pi}{12}, n\in Z;$

$$-8\pi\le 2\pi+12\pi n\le 19\pi, n\in Z;$$

$$-10\le 12n\le 17, n\in Z.$$

Следовательно n=0 или n=1, то есть

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{6}, \\ x=\frac{7\pi}{6}. \end{array}\right.$$

Из второй серии: $-\frac{2\pi}{3} \le -\frac{\pi}{6} + \pi n \le \frac{19\pi}{12}, n \in Z;$

$$-8\pi \le -2\pi + 12\pi n \le 19\pi, n \in Z;$$

$$-6 \le 12n \le 21, n \in Z.$$

Следовательно n=0 или n=1, то есть

$$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{6}, \\ x=\frac{5\pi}{6}. \end{array}\right.$$

$Ответ: \{\pm\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\}.$

VI **Итоги урока.**

Сегодня на уроке мы систематизировали умения и навы применению трех способов отбора корней в тригонометри уравнениях.

За урок вы получаете следующие оценки:…………………

Спасибо за урок!

Литература.

1. А.Г. Мордкович. Алгебра и начала анализа 10-11. Часть 1. Учебник.
2. А.Г. Мордкович и др. Алгебра и начала анализа, 10-11. Часть 2. Задачник.